Γραμμική Άλγεβρα II

Φροντιστηριακές ασκήσεις #6, Μάρτιος 2016, Ισομετρίες

1. Συμπληρώστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ώστε να είναι ορθογώνιος.

2. Έστω η απεικόνιση $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle := 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

- Δείξτε ότι η $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.
- Δείξτε οτι η γραμμική απεικόνιση $T : \left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot , \cdot \rangle_{can}\right) \to \left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot , \cdot \rangle\right)$ με τύπο

$$T(x, y, z) := \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\right),$$

όπου $\langle \cdot , \cdot \rangle_{can}$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$, είναι ισομετρία.

3. Να ορίσετε μια ισομετρία από τον Ευκλείδειο χώρο $\left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot , \cdot \rangle_{can}\right)$ στον Ευκλείδειο χώρο $\left(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot , \cdot \rangle\right)$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ 2 με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

4. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

παριστάνει στροφή κατά γωνία φ περί ενός άξονα $\mathcal{E}$ που περνάει από το σημείο $O = (0,0,0)$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τον άξονα $\mathcal{E}$ και την γωνία φ.

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ 21/04/2016

Μια ισομετρία διατηρεί το μήκος, το εσωτερικό γινόμενο, την γωνία, την καθετότητα και την απόσταση.
Και από τον ορισμό της, είναι γραμμική

Έστω μια ισομετρία $f: E \to E$ με πεπερασμένη διάσταση ($\dim E = n$)
Η f είναι γραμμική και σε αυτήν μπορώ να αντιστοιχίσω έναν πίνακα :

$$[f]_e^e \text{, με } e = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\} \text{ ορθοκανονική βάση του } E$$

$$[f]_e^e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

⊛ την πρώτη στήλη μου την λέει το $f(\vec{e_1}) = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + \dots + a_{n1}\vec{e_n}$

⊛ την στήλη i μου την λέει το $f(\vec{e_i}) = a_{1i}\vec{e_1} + a_{2i}\vec{e_2} + \dots + a_{ni}\vec{e_n}$

⊛ την στήλη n μου την λέει το $f(\vec{e_n}) = a_{1n}\vec{e_1} + a_{2n}\vec{e_2} + \dots + a_{nn}\vec{e_n}$

Έχουμε $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

f ισομετρία
$\langle f(\vec{e_i}), f(\vec{e_j}) \rangle = \delta_{ij}$

Έχουμε : $\delta_{ij} = \langle f(\vec{e_i}), f(\vec{e_j}) \rangle =$
$= \langle a_{1i}\vec{e_1} + a_{2i}\vec{e_2} + \dots + a_{ni}\vec{e_n}, a_{1j}\vec{e_1} + a_{2j}\vec{e_2} + \dots + a_{nj}\vec{e_n} \rangle =$
$= a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } i=j, \quad a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ni}^2 = 1. \\ \text{Για } i \neq j, \quad a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = 0. \end{array}\right\} \text{προκύπτει από το } \delta_{ij}$$

→ →

Οι στήλες του πίνακα $[f]_e^e$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

- Το $\mathbb{R}^{n\times 1} \rightarrow$ συνήθες εσωτερικό γινόμενο
- Όλες οι στήλες έχουν μήκος 1.
- οποιεσδήποτε δύο στήλες έχουν εσωτερικό γινόμενο 0.

Ονομάζω A τον πίνακα $[f]_e^e$ από μία ορθοκανονική βάση σε ορθοκανονική βάση.

Αν πολ/σουμε τον A με τον A^t (ανάστροφος) τότε:

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

προέκυψε ο ταυτοτικός.
Από το $\delta_{ij} \Rightarrow 1$ όπου $i=j$
$\Rightarrow 0$ όπου έχουμε εσωτερικό γινόμενο δύο στηλών του A. $(i \neq j)$

Δείξαμε, επομένως: $A^t \cdot A = I_n \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A^t$

$$A^{-1} \cdot A = I_n = A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t$$

Συμπέρασμα: Όχι μόνο οι στήλες αποτελούν ορθοκανονική βάση, αλλά και οι γραμμές του $[f]_e^e$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{1\times n}$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός: Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται ορθογώνιος αν $A^t \cdot A = I_n$.
$(A^t \cdot A = I_n = A \cdot A^t \longrightarrow A^t = A^{-1})$
A ορθογώνιος αν και μόνο αν ο ανάστροφός του είναι ο αντίστροφός του.

Θεώρημα: Έστω E ευκλείδειος χώρος διάστασης n και $f: E \to E$ γραμμική απεικόνιση και $e = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ ορθοκανονική βάση του E. Η f είναι ισομετρία αν και μόνο αν ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f: $[f]_e^e$ είναι ορθογώνιος.

απόδειξη: $(\Longrightarrow)$ Η απόδειξη αυτής της κατεύθυνσης έγινε προηγουμένως.

f ισομετρία $\Longrightarrow$ $[f]_e^e$ ορθογώνιος

$(\Longleftarrow)$ $[f]_e^e$ ορθογώνιος
Έχουμε $e = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ ορθοκανονική βάση. Αρκεί να οι εικόνες της e είναι ορθοκανονική βάση του E
Αυτό θα προκύψει αν δείξω ότι $\langle f(\vec{e_i}), f(\vec{e_j}) \rangle = \delta_{ij}$.

$$[f]_e^e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ (ορθογώνιος πίνακας)

$\langle f(\vec{e_i}), f(\vec{e_j}) \rangle = \langle a_{1i}\vec{e_1} + a_{2i}\vec{e_2} + \dots + a_{ni}\vec{e_n}, a_{1j}\vec{e_1} + a_{2j}\vec{e_2} + \dots + a_{nj}\vec{e_n} \rangle =$
(e ορθοκανονική βάση $\longrightarrow$ μετατρέπει οποιοδήποτε εσωτερικό γινόμενο στο συνήθες)
$= a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = \delta_{ij}$ (αφού A ορθογώνιος)

Άρα $\{f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_n})\}$ ορθοκανονική βάση του E, δηλαδή η f στέλνει την ορθοκανονική βάση $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ στην ορθοκ. βάση $\{f(\vec{e_1}), \dots, f(\vec{e_n})\}$
$\Rightarrow$ f ισομετρία.

Ερώτημα: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A ορθογώνιος
$\det(A)$?

Γνωρίζω ότι $A^t \cdot A = I_n$

$$\det(A^t \cdot A) = \det(I_n)$$

$$\det(A^t) \cdot \det(A) = \det(I_n)$$

όμως $\det(A) = \det(A^t)$: $(\det(A))^2 = 1$

$$\det(A) = \pm 1$$

Άρα η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα είναι $+1$ ή -1.
Το πρόσημο προκύπτει από την βάση. Αν η βάση είναι δεξιόστροφη έχουμε $+1$, αν είναι αριστερόστροφη είναι -1.

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε όλους τους ορθογώνιους 2×2 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} a & \gamma \\ b & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{A \text{ ορθογώνιος}} A^t = A^{-1} \quad (*)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ και } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a\delta - b\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{a\delta - b\gamma} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Δείξαμε ότι η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα είναι $+1$ ή -1.

1η περίπτωση: $\det A = a\delta - b\gamma = 1$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ άρα } \begin{array}{l} a = \delta \\ \gamma = -b. \end{array} \longrightarrow$$

Άρα έχουμε $A=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$\det A = \alpha^2+\beta^2=1$. Άρα $-1 \le \alpha \le 1$. και $-1 \le \beta \le 1$.

$-1 \le \text{συν}\theta \le 1$ $\quad$ $-1 \le \text{ημ}\theta \le 1$.

και επομένως $A=\begin{pmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{pmatrix} \rightarrow$ $\boxed{\text{στροφή}}$ γωνίας θ.

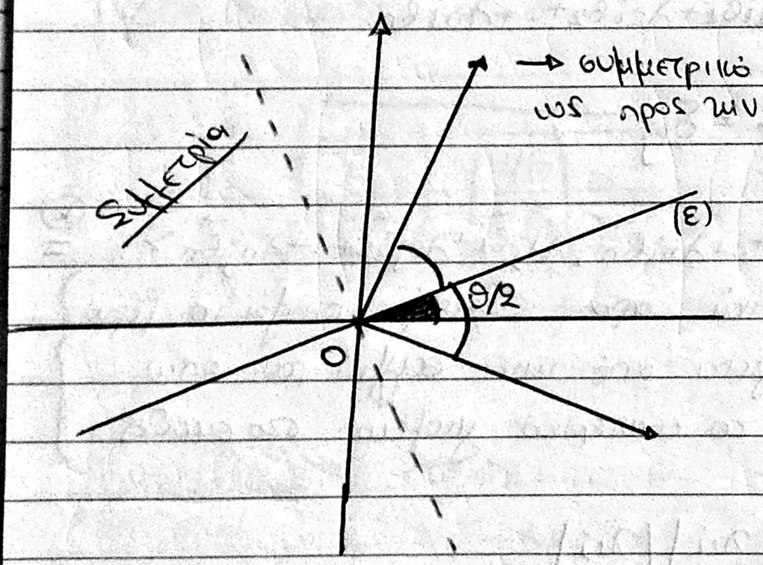
<u>2η περίπτωση</u>: $\det(A)=-1$

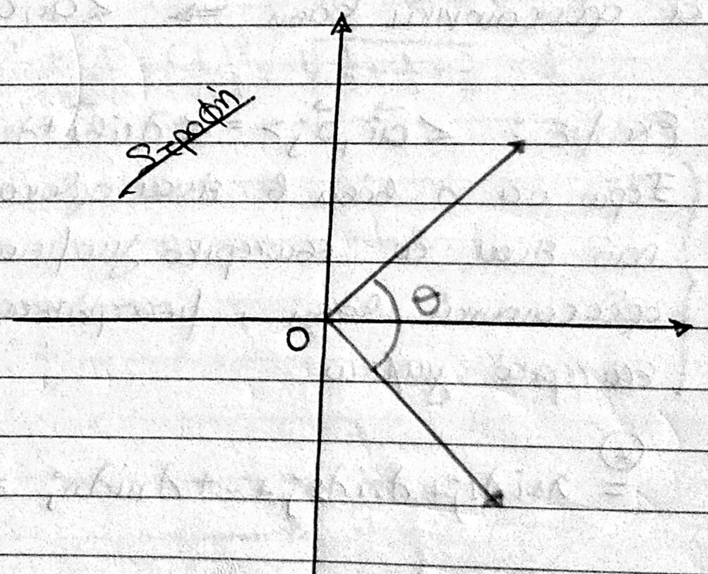
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha=-\delta \\ \beta=\gamma \end{matrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = -\alpha^2-\beta^2=-1. \Longrightarrow \alpha^2+\beta^2=1.$$

Επομένως

$A=\begin{pmatrix} \text{συν}\theta & \text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & -\text{συν}\theta \end{pmatrix} \rightarrow$ $\boxed{\text{συμμετρία}}$ ως προς άξονα που σχηματίζει γωνία $\frac{\theta}{2}$ με τον άξονα x





ο άξονας (ε) είναι ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.
$V(1)$.
Τα διανύσματα κάθετα: $V(-1)$

Κανένα διάνυσμα δεν πάει στον εαυτό του.
Δεν υπάρχει πραγματική ιδιοτιμή

Θεώρημα: Έστω $f: E \to E$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή της f, τότε $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Απόδειξη: $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή της $f \Rightarrow$ υπάρχει $\vec{a} \neq \vec{0}$ τέτοιο ώστε $f(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$.

f ισομετρία $\quad \|\vec{a}\| = \|f(\vec{a})\| = \|\lambda \vec{a}\| = \sqrt{<\lambda\vec{a}, \lambda\vec{a}>} = \sqrt{\lambda^2 <\vec{a}, \vec{a}>} = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$.

$\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{a}\| \neq 0$. και $\|\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Θεώρημα: Έστω E Ευκλείδειος χώρος και $a = \{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\}$, $\theta = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ ορθοκανονικές βάσεις του E, τότε ο πίνακας αλλαγής βάσης $[I]_a^\theta$ είναι ορθογώνιος.

απόδειξη:

$$[I]_a^\theta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}$$

- Πρώτη στήλη: $I(\vec{a_1}) = \vec{a_1} = \lambda_{11}\vec{b_1} + \lambda_{21}\vec{b_2} + \dots + \lambda_{n1}\vec{b_n}$
- i στήλη: $I(\vec{a_i}) = \vec{a_i} = \lambda_{1i}\vec{b_1} + \lambda_{2i}\vec{b_2} + \dots + \lambda_{ni}\vec{b_n}$.

a ορθοκανονική βάση $\Rightarrow <\vec{a_i}, \vec{a_j}> = \delta_{ij}$

Έχουμε: $<\vec{a_i}, \vec{a_j}> = <\lambda_{1i}\vec{b_1} + \lambda_{2i}\vec{b_2} + \dots + \lambda_{ni}\vec{b_n}, \lambda_{1j}\vec{b_1} + \lambda_{2j}\vec{b_2} + \dots + \lambda_{nj}\vec{b_n}> \overset{*}{=}$

{Ξέρω ότι η βάση b είναι ορθοκανονική άρα. Δεν με νοιάζει να ξέρω ποιό είναι το εσωτερικό γινόμενο, γιατί από την στιγμή που έχω ορθοκανονική βάση, μετατρέπεται το εσωτερικό γινόμενο στο συνήθες εσωτερικό γινόμενο.}

$$\overset{*}{=} \lambda_{1i}\lambda_{1j} + \lambda_{2i}\lambda_{2j} + \dots + \lambda_{ni}\lambda_{nj} = < \begin{vmatrix} \lambda_{1i} \\ \lambda_{2i} \\ \vdots \\ \lambda_{ni} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \vdots \\ \lambda_{nj} \end{vmatrix} >$$

Άρα $[I]_a^\theta$ ορθογώνιος πίνακας.

Στον τύπο : $[f]^a_a = [I]^a_e \cdot [f]^e_e \cdot [I]^e_a$ μου χρειάζονται οι πίνακες αλλαγής βάσης.

<u>Φασματικό Θεώρημα</u>: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ο A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^t \cdot A \cdot P$ διαγώνιος.

<u>Συμπέρασμα</u>:
Μπορώ να βρω μια ορθοκανονική βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα.

#Φυλλάδιο 6

<u>Άσκηση 1</u>

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Αν δεν έχει μια έστω στήλη μήκος 1, τότε δεν μπορώ να τον συμπληρώσω σε ορθογώνιο, ό,τι και να έχουν οι άλλες στήλες

Πρέπει η κάθε στήλη να έχει μήκος 1.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1.$$

Με τον ίδιο τρόπο $\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$

Πρέπει το εσωτερικό γινόμενο των (δύο) στηλών να είναι 0:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} + \frac{1\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} + 0 = 0$$

Άρα μπορώ να τον συμπληρώσω σε ορθογώνιο.

<u>**1ος τρόπος**</u> (ακολουθώ την διαδικασία Gram-Schmidt)

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

συμπληρώνω την βάση και ελέγχω με την ορίζουσα η οποία πρέπει να είναι $\neq 0$. Παρατηρώ ότι τα διανύσματα είναι γ.α. άρα $\det \neq 0$.

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b_2} = \vec{a_2} - \frac{\langle \vec{a_2}, \vec{b_1} \rangle}{\langle \vec{b_1}, \vec{b_1} \rangle}\vec{b_1} = \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b_3} = \vec{a_3} - \frac{\langle \vec{a_3}, \vec{b_1} \rangle}{\langle \vec{b_1}, \vec{b_1} \rangle}\cdot\vec{b_1} - \frac{\langle \vec{a_3}, \vec{b_2} \rangle}{\langle \vec{b_2}, \vec{b_2} \rangle}\cdot\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-3}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/14 \\ 6/14 \\ -9/14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/42 \\ 4/42 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$$

$$\vec{\beta_4} = \vec{\alpha_4} - \frac{\cancelto{0}{\langle \vec{\alpha_4},\vec{\beta_1}\rangle}}{\langle \vec{\beta_1},\vec{\beta_1}\rangle}\vec{\beta_1} - \frac{\cancelto{0}{\langle \vec{\alpha_4},\vec{\beta_2}\rangle}}{\langle \vec{\beta_2},\vec{\beta_2}\rangle}\vec{\beta_2} - \frac{\cancelto{0}{\langle \vec{\alpha_4},\vec{\beta_3}\rangle}}{\langle \vec{\beta_3},\vec{\beta_3}\rangle}\vec{\beta_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \quad \left(\text{γιατί} \quad \langle \vec{\alpha_4},\vec{\beta_1}\rangle = \langle \vec{\alpha_4},\vec{\beta_2}\rangle = \langle \vec{\alpha_4},\vec{\beta_3}\rangle = 0\right)$$

Άρα $\vec{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta_3} = \begin{pmatrix} -5/42 \\ 4/42 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{\gamma_1} = \frac{\vec{\beta_1}}{\|\vec{\beta_1}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma_2} = \frac{\vec{\beta_2}}{\|\vec{\beta_2}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε $\|\vec{\beta_3}\| = \sqrt{\left(\frac{-5}{42}\right)^2 + \left(\frac{4}{42}\right)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{42}{42^2}} = \sqrt{\frac{1}{42}} = \frac{1}{\sqrt{42}}$, επομένως:

$$\vec{\gamma_3} = \frac{\vec{\beta_3}}{\|\vec{\beta_3}\|} = \begin{pmatrix} -5/\sqrt{42} \\ 4/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{42} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma_4} = \frac{\vec{\beta_4}}{\|\vec{\beta_4}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2^{ος}$ τρόπος

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & \beta_1 & \beta_2 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

Συμβολίζω $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ τα $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}$ και το $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ για να μην κάνω δύο φορές τις πράξεις, αφού ότι ισχύει για το ένα ισχύει και για το άλλο.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{14}}\alpha + \frac{2}{\sqrt{14}}\beta - \frac{3}{\sqrt{14}}\gamma = 0$$

Δημιουργώ τον επαυξημένο και κάνω γραμμοπράξεις.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -5s \\ \beta = 4s \\ \gamma = s \\ \delta = t. \end{cases}$$

Άρα
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -5s \\ -4s \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| \ s,t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ s\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

↳ ορθοκανονική βάση.

Βλέπω πως το εσωτερικό γινόμενο είναι 0 και το αποτέλεσμα έπεται.